

Lesson 3 Simulation

$$\frac{CDS - SIE}{\gamma}$$

Ph. Neillhaupt

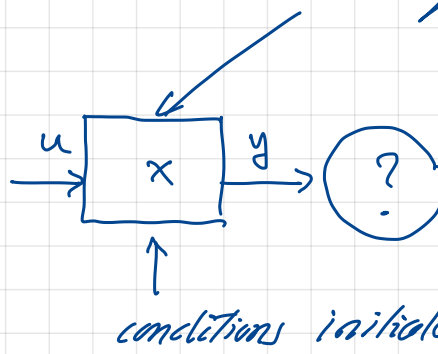
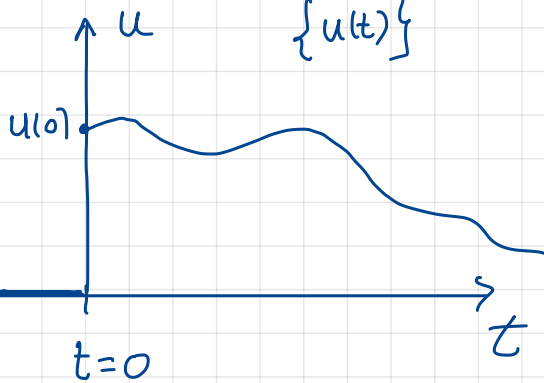


Plan III. simulation

- 1) Signaux et systèmes et simulation (objectif)
- 2) approximation de la dérivée
- 3) Méthodes d'Euler
- 4) Méthode de Runge-Kutta à pas fixe
- 5) Linéarisation, équilibre et point de fonctionnement

I. Signaux et systèmes

$\{u(t)\}$



système :

transforme le signal d'entrée en un signal de sortie.

modèle : $\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v$
 linéaire
 non linéaire $\dot{x} = f(x, u, v)$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $B_u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
 $B_v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

sortie linéaire $y = Cx + Du$

$D \in \mathbb{R}$
 $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

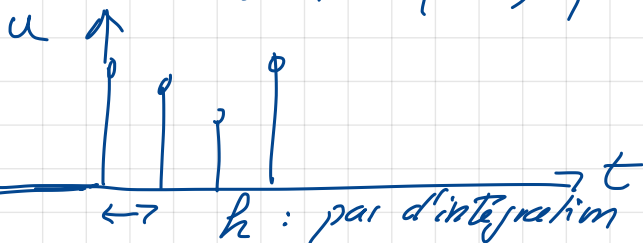
$f \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$

objectif déterminer $\{y(t)\}$ connaissant $\{u(t)\}$ et $x(0)$

simulation

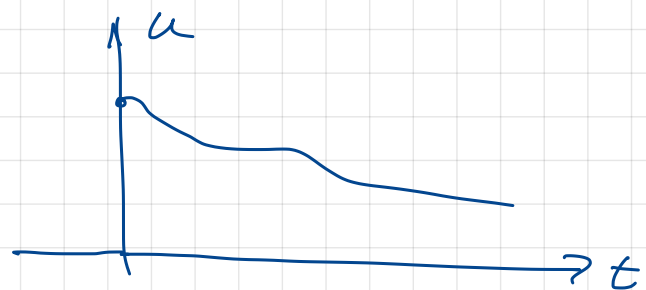
approximatif

on discrétise $\{u(t)\}$



méthodes exactes

exact



2. Approximation de la dérivée :

définition :

$$\dot{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

approximation :

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (\text{anticipatif})$$

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \quad (\text{rétrograde, non anticipatif})$$

Euler explicite

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t))$$

approximation discrète $t = kh \quad k \in \mathbb{N}$

$$\dot{x}(kh) = f(x(kh), u(kh), v(kh))$$

h petit.

$$x(kh+h) = h \cdot f(x(kh), u(kh), v(kh)) + x(kh)$$

$$\frac{x(kh+h) - x(kh)}{h} \approx f(x(kh), u(kh), v(kh)) = \dot{x}$$

$\approx$ est remplacé par $=$, on commet une erreur !

Euler implicite

$$\frac{x(kh) - x(kh-h)}{h} \approx f(x(kh), u(kh), v(kh))$$

$$\frac{x(kh+h) - x(kh)}{h} \approx f(x(kh+h), u(kh+h), v(kh+h))$$

$\approx$ approximation.

$$x(4h+h) - h f(x(4h+h), u(4h+h), v(4h+h)) = +x(4h)$$

résoudre l'équation implicite pour $x(4h+h)$

Inconvénient: il faut réduire h pour avoir une bonne précision. h petit entraîne beaucoup d'évaluations de $f(x(4h), u(4h), v(4h))$ pour un temps de simulation T .

3. méthode de Runge Kutta

idée: utiliser plusieurs approximations de la dérivée pour augmenter la précision.

0 pas dans le futur

$$\underline{k}_1 = f(\underline{x}(t), u(t), v(t))$$

$\frac{1}{2}$ pas dans le futur

$$\underline{k}_2 = f(\underline{x}(t) + \frac{h}{2} \underline{k}_1, u(t + \frac{h}{2}), v(t + \frac{h}{2}))$$

$\frac{3}{2}$ pas dans le futur

$$\underline{k}_3 = f(\underline{x}(t) + \frac{h}{2} \underline{k}_2, u(t + \frac{h}{2}), v(t + \frac{h}{2}))$$

1 pas complet dans le futur

$$\underline{k}_4 = f(\underline{x}(t) + h \underline{k}_3, u(t+h), v(t+h))$$

$$x(t+h) = \frac{h}{6} (\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4) + x(t)$$

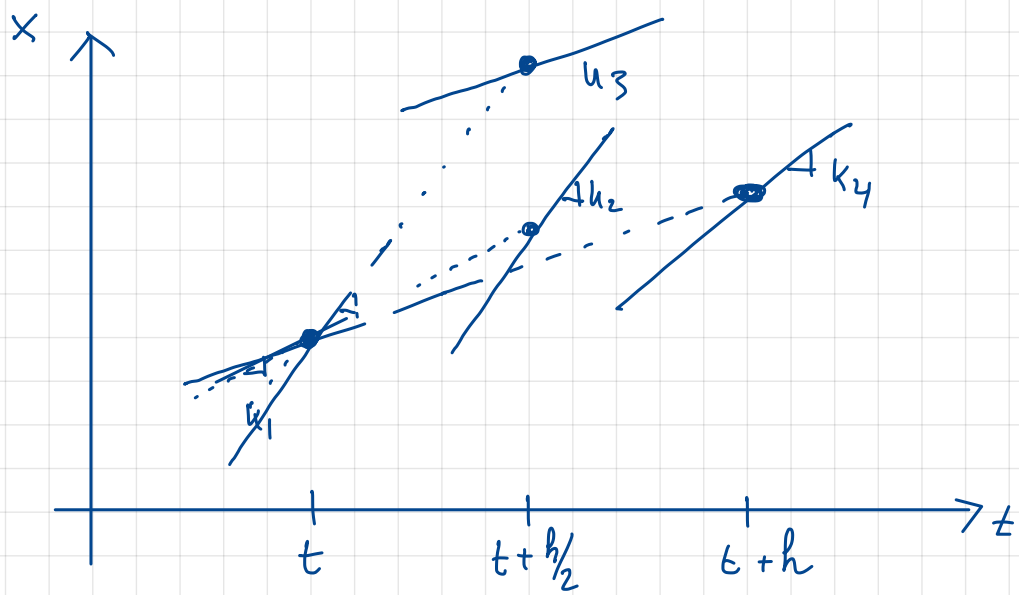
Rappel Euler explicite

$$x(t+h) = h \underline{k}_1 + x(t)$$

Runge Kutta à pas fixe (h)

Matlab ode45

help ode45



Linearisation, point de fonctionnement
équilibre

objectif: obtenir à partir d'un modèle d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, v) \\ y = h(x, u, v) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

un modèle linéaire
d'état

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + B_u \tilde{u} + B_v \tilde{v} \\ \tilde{y} = C \tilde{x} + D_u \tilde{u} + D_v \tilde{v} \end{cases}$$

1.) Trouver un point d'équilibre

Def. un point d'équilibre (point de fonctionnement)
est une solution $\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}$

de $\boxed{0 = f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})}$

système
algébrique
à résoudre

2.) définir $\tilde{x}$ comme l'écart de x par rapport à l'équilibre, on écrit également $\Delta x = \tilde{x}$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &\triangleq \bar{x} - x & \tilde{v} &\triangleq \bar{v} - v \\ \tilde{u} &\triangleq \bar{u} - u \end{aligned}$$

3) On utilise ensuite un développement de Taylor à l'ordre 1.

$$\dot{x} = f(x, u, v)$$

$$\dot{\bar{x}} = 0 = f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \quad (=0 \text{ par définition de } \bar{x})$$

$$\tilde{\dot{x}} = \dot{\bar{x}} - \dot{x} = 0 - \dot{x} = -f(x, u, v)$$

$$f(x, u, v) = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} (x - \bar{x}) + \dots$$

$$\dots + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} (u - \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} (v - \bar{v})$$

$$\tilde{\dot{x}} = -f(x, u, v) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} (\bar{x} - x) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} (\bar{u} - u) + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} (\bar{v} - v)$$

$$\tilde{\dot{x}} = A \tilde{x} + B_u \tilde{u} + B_v \tilde{v}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}}$$

$$B_u = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}}$$

$$B_v = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$B_u = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}}$$

$$B_v = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}}$$

